2024 牛客
暑期多校训练营

dXqwq feat. bmbXp

Multi-University Round 8

写在前面的废话

- 寒假就准备好的多校。
- 出题人害怕自己退役，所以一大早就把活干完了，虽然最后紧急预案也没用上，因为拿到金牌了。
- 赛前预计出简单了，Homama 可以 4 小时 AK。
- 大概是出题人认为自己出过的最好的题目。
- 命题组认为的难度升序：KEADJGIFCBH。
- 实际比赛过题人数排序：KAEJDGIFCHB。

写在前面的废话

- 预估的难度几乎全对了，太棒了。
- 有好多人写了大模拟，太棒了。
- 本来想防住 Homama AK，中途一度以为成功了，但是失败了。
- echo -n "第 3 个通过 D 题的队伍，不是中国队伍则向后顺延" | sha256sum
- 7f995e064a3f3b9aaf18e48a92d367e38a90c853f0becfcb3ff71c867f08a774
- 恭喜来自南京大学的队伍 Qliphoth 获得了价值约 100 元的神秘奖品：北部玄驹手办！

致歉

- D 题题面虽然经过了数次和验题人的沟通和修改，还是有一些比较模糊的情况（如训练等级和夏合宿），让部分选手做题的时候遇到了困惑。
- E 题给了很多 $O(T\sqrt{n})$ 选手虚假的希望。
- I 题为了卡掉 $O(n\log^3 n)$ 的做法时限比较紧。

K - Haitang and Ava

题目大意

- 给一个字符串，问能不能分成若干个子串 ava 和 avava。

题解

- 观察当前串的第四个字符，发现匹配的过程是唯一的。
- 关注李滇滇谢谢喵！

E - Haitang and Math

题目大意

- 给定 n，问有多少 $m \leq n$ 满足 $n \bmod m = S(m)$。
- $S(m)$ 为 m 的十进制下数位和。

题解

- $S(m) \leq 9\lceil \log_{10} m \rceil$。
- 枚举 $S(m)$ 之后分解质因数。
- 考虑对 $[n-108, n]$ 直接进行质因数分解，使用区间筛即可。
- 时间复杂度 $O(T(\frac{\sqrt{n}}{\log n} + d(n)\log n))$。
- 应该放过了一些实现轻量级的 $O(T\sqrt{n})$。

A - Haitang and Game

题目大意

- 有一个集合，两个人玩游戏。
- 每次一个人选择两个数，满足它们的 $\gcd$ 不在集合里。
- 然后插入 $\gcd$ 的值。
- 无法行动的人输，问赢家。

题解

- 注意到这根本不是博弈题：最终状态是确定的。
- 考虑每个数 d 是否在终止状态里，当且仅当所有 d 的倍数的 $\gcd$ 为 d。
- 有两种实现方法：
- 1. 对于 d 枚举所有 d 的倍数并求它们的 $\gcd$，最后检查 $\gcd$ 是否等于 d。
- 2. 对于 d 检查是否存在 $k > 1$，使得输入中 d 的倍数数量等于 kd 的倍数数量。
- 由于 $\gcd$ 函数的复杂度可以均摊计算，两种实现方法的时间复杂度均为 $O(a \log a)$。

D - Haitang and Uma Musume

题目大意

- 模拟赛马娘中训练数值的计算。
- 马娘的属性：初始值，增长加成。
- 支援卡的属性：友情加成，训练加成，单项加成。
- 全局变量：夏合宿，干劲，体重过胖

题解

- 一场 XCPC 需要一道小模拟。
- 根据题意模拟即可。
- 需要注意浮点计算取整，有两种不同的实现方式。
- 1. 使用 128 位整数先乘后除，全程不涉及小数。
- 2. 在取整时先加上 ϵ。
- 可能的 WA 原因：浮点数精度不足时四舍五入满足二进制末位成双原则。

J - Haitang and Triangle

题目大意

- 构造一个长度为 n 的排列，满足恰有 m 个长度为 3 的子区间满足区间中的数可以是三角形的三边长度。

题解

- 从边界情况入手问题，记 $d = \frac{n}{3}$。
- 有一个 $k = 0$ 的构造，形如
  $[d, 2d, 3d, d-1, 2d-1, 3d-1, \cdots, 1, d+1, 2d+1]$。
- 有一个 $k = n-3$ 的构造，形如 $[1, 2, \cdots, n]$。
- $k = n-2$ 无解，因为对于整数 $x < y$，则 $1 + x \leq y$，因此含 1 的三角形一定非法。
- 因此，我们可以将 $n-k$ 个数用 $k = 0$ 的构造方法，后 k 个数直接全部放到某一边。
- d 不是整数时可以将 d 下取整然后在两边进行微调。

G - Haitang and Rock Paper Scissors

题目大意

- 你要和 n 个人玩石头剪刀布。
- 赢了得 1 分，平了得 0 分，输了得 -10^9 分。
- 你知道所有人出的手势，但你不能连续两次出一样的手势。
- 给定一个手势序列，其中一些是问号。
- 求所有问号替换方式下你的最大分数的和。
- 注意先替换问号，再确定策略，也就是不同序列可以用不同策略。

题解

- 朴素 DP 可以考虑 $f_{x,y,z}$ 代表 DP 到 x，出能赢的手势最多获得 y 分，出能平的手势最多获得 z 分的方案数。
- 时间复杂度 $O(n^3)$。
- 考虑优化：我们只关心 $y-z$ 的值，$\max(y,z)$ 可以直接计入答案。
- 时间复杂度 $O(n^2)$。

I - Haitang and Ranking

题目大意

- 给定两张排行榜和一张总榜。
- 问是否存在一对人，满足某个人在两张榜都排名更前，但总排名更后。
- 需要支持 q 次单点交换。

题解

- 问题等价于询问是否存在 (i, j) 满足 $a_i < a_j, b_i < b_j, c_i > c_j$。
- 先考虑将某一个排列变成单位排列，即将所有点按 a_i 排序。
- 那么问题变为是否存在 (i, j) 满足 $b_i < b_j, c_i > c_j$。
- 直接做的问题等价于强制在线的三维数点，不是很好做，考虑对其中一维分治，相邻两层之间可以使用线段树维护信息，每次在 $\log$ 棵线段树上修改，动态维护一棵子树对应在左侧和右侧的所有点上的最大值/最小值即可。
- 时间复杂度 $O((n+m)\log^2 n)$。

F - Haitang and Diameters

题目大意

- 给定一棵 n 个点的树，每条边的边权可以取 0 或 1。
- 对于这 2^{n-1} 棵树求带权直径的数量之和。
- 答案对 998244353 取模。

题解

- 考虑直径中点，要么在边上要么在点上。
- 如果在边上显然这条边两侧的子树最大深度需要相等。
- 如果在点上，则所有子树中，能取到最大深度的需要有 ≥ 2 个。
- 考虑所有点上的直径中点都是可以通过 0 权边可以走到的连通块，这里可以使用一个比较 well-known 的点减边 Trick，即在点上统计答案 $+1$，在边上统计答案 -1，而在边上我们只需要将这条边权值改成 1 就能把贡献扔掉，相当于只需要统计每个点的答案。

题解

- 那么问题变成了求子树最大深度为 x 的方案数和所有方案中取到最大深度的点数之和。
- 直接按照题意 DP 就可以做到 $O(n^4)$ 了，上个前缀和优化就是 $O(n^3)$ 了。
- 做到 $O(n^2)$ 需要类似长剖的技巧，用 $O(\min(sz_x, sz_y))$ 的代价合并两棵子树，这样对于一个结点的合并代价之和是 $O(n)$ 的。
- 然后因为只有 $O(n)$ 个本质不同的子树，每次决定是否给子树根节点的边赋值为 1 的计算次数只有 $O(n)$ 次，所以这里也是 $O(n^2)$ 的。
- 注意由于答案对 998244353 取模，如果你需要乘法逆元，需要记录一个数乘了几次 0。

C - Haitang and Graph

题目大意

- 给定一张无向图，问有多少图满足以下条件：
- 原图是新图的生成子图。
- 新图恰好有 m 条边，边权小于 2^k。
- 对于所有 $1 \leq i, j \leq n$，$0 \leq v < 2^k$，存在 i 到 j 异或和为 k 的路径。

题解

- 原条件成立当且仅当以下两个条件成立：
- 1. 图连通。
- 2. 对于 $i = [0, 2^w)$，存在一个异或和为 i 的非简单环。
- 证明：首先图连通是必要条件，不然可能两个点之间找不到路径。
- 然后后面的条件是充分条件，因为可以先走到环上的一个结点，绕着这个环走一圈，最后原路返回起点。
- 考虑后面的条件同样是必要的：对于图构建生成树，对于所有非树边，将其在树上路径对应的环长加入线性基，显然需要满秩才合法。
- 那么我们就可以做 $m = m_0$ 的情况了，按照上面的方法检验即可。

题解

- 然后我们再考虑另一个问题，即树形态给定，边权不给定，这等价于以下问题：
- 求长度为 $m-n+1$，值域为 $[0,2^w)$，且对应线性基满秩的序列数量。
- 这是简单的，做一个 DP，设 $f_{x,y}$ 为前 x 个数线性基大小为 y 的方案数量，此时转移数量即为值域减去已经能被基表示的答案数量，即 2^w-2^y。
- 于是将它们拼起来我们会发现只需要求出加上 $m-m_0$ 条边使图连通的方案数就可以了。

题解

- 这个问题是经典的，考虑做一个划分数复杂度的 DP，状态为每个连通块的大小可重集和图的边数。先将所有加入的边钦定一个顺序，这样就可以每次选择一条边转移出去，合并连通块或者在连通块内部连边，最后除掉 $(m - m_0)!$ 即可。
- 时间复杂度 $O(P(n) \cdot nm + mw)$，常数视实现，时间限制为 std 的三倍。

B - Haitang and Xor Mex

题目大意

- 定义一个序列的 xormex 为全 xor 一个数的 mex 的最大值。
- q 次求一个区间的所有子区间的 xormex 的和。

题解

- 考虑对于一个序列怎么求答案。
- 建一个 Trie，在 Trie 上 DP 即可。
- 考虑对于每个点算贡献，也就是一棵子树填满的时候会给这棵子树的兄弟提供贡献。
- 对于右端点扫描线维护所有左端点的答案，每次插入一个元素，考虑 Trie 上被这个元素填满的结点，这些结点的子树大小总和是 $O(2^n n)$ 的。
- 所以我们可以暴力枚举其子树内的所有叶子，求出其对答案的 n 段贡献。由于每段贡献都是单调的，因此所有贡献的 $\max$ 也是单调的。

题解

- 对于所有贡献都形如左端点 $\leq x$ 的点的答案和 y 取 $\max$，扫描线之后就可以转化为前缀 $\max$ 区间历史和问题，可以使用线段树解决。
- 一共有 $O(2^n n^2)$ 次线段树操作，时间复杂度 $O(2^n n^3 + nm)$。
- 一个不难想到的优化是直接对子树内 $2^{n'}$ 种可能的答案全部求出最大左端点，再和子树外的 n 个决策归并一下，就变成 $O(2^n n)$ 次线段树操作即 $O(2^n n^2 + nm)$ 的了。

H - Haitang and Water

题目大意

- 有 n 个杯子，第 i 个的容积是 a_i。
- 最开始第 1 个杯子是满的，然后我们从左到右对每个杯子依次操作。
- 每次随机在剩下 $n-1$ 个杯子里选一个，把水倒过去。
- 每次操作结束当且仅当目标杯满或当前杯空。
- 问每个杯子最后水量期望。

题解

- 记第 i 个瓶子当前盛有水的体积为 b_i。
- 当某一次选择往一个瓶子的左边倒水时，后续的倒水操作没有意义。
- 证明：显然此时所有右侧的瓶子都没有水。
- 推论：当某一次选择 x 往左边的 y 倒水时，其会往左边的瓶子倒入恰好 $\min(a_y, b_x)$ 份水。
- 证明：y 没有被倒入过水时显然。如果 y 被倒入过水，x 中的水一定是 y 倒出的水的一部分。
- 因此我们可以写出一个 DP：设 $f_{x,k}$ 为 x 倒水时有 k 个单位水的概率，可以向前转移直接加入答案，或者向后转移到 $f_{y,\min\{k,a_y\}}$。
- 时间复杂度 $O(n^3)$。

题解

- 接下来就是对这种看起来就很能优化的式子硬上的 dirty work。
- 首先转移只分 $k \geq a_y$ 和 $k < a_y$，直接上前缀和优化，维护 $F_{x,t} = \sum_{i \leq t} f_{x,i}$ 和 $G_{x,t} = \sum_{i \leq t} i f_{x,i}$。这样就可以优化掉一维枚举。
- 这样时间复杂度可以降低到 $O(n^2)$。
- 然后我们考虑将一些重复信息优化掉，发现我们只需要 $\sum_{i<x} F_{i,j}$ 和 $\sum_{i<x} G_{i,j}$ 就可以快速维护 $F_{x,j}, G_{x,j}$ 了，只需要在一个前缀做一次区间和，并在一个后缀做一次区间加即可，使用线段树优化之后可以得到一个几百倍常数的 $O(n \log n)$ 做法，可以通过。

THANKS!

AC.NOWCODER.COM