牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

2024 牛客
暑期多校训练营 6

Sugar, Oscar, dgg, superguymj, quailty

HR.NOWCODER.COM

A - Cake

题目大意

- 两个人玩游戏，游戏分两阶段
- 第一阶段在一棵有根树上轮流走，走到叶子停止，有根树边上有 01 标记，记录下走过的 01 串
- 第二阶段分蛋糕，Oscar 按自己的意愿切蛋糕，然后按照第一阶段获得的 01 串顺序依次拿蛋糕（1 代表 Grammy 拿，0 代表 Oscar 拿）
- 两人都想让自己获得尽量多的蛋糕，求最后 Grammy 获得的蛋糕比例
- $1 \le n \le 2 \times 10^5$

题解

- 考虑第二阶段，Oscar 的最优方案是选择一个 0 占比最大的前缀 L，将蛋糕切成 L 个 $\frac{1}{L}$ 大小的块，然后自己拿走 0 的占比那么多
- 对于第一阶段，Oscar 的目标是经过前缀 0 占比尽量大的点，Grammy 的目标是经过前缀 0 占比尽量小的点（前缀指从根到当前节点的路径）
- 这个问题可以通过从叶子到根的 dp 解决，轮到 Oscar 行动的节点取后继节点的 max，轮到 Grammy 行动的节点取后继节点的 min

B - Cake 2

题目大意

- 给一个正 n 边形，连接所有距离为 k 的顶点，求多边形内部被划分成多少个区域
- $4 \leq n \leq 10^6, 2 \leq k \leq n-2$

题解

- 手画几个图，找规律可得 $2k = n$ 时答案为 n，否则答案为 $n \cdot \min(k, n-k) + 1$
- 证明可以使用欧拉定理 $V - E + F = 2$，每条线段相交的数量可以由小的那一侧顶点数推出，这样可以同时算出公式中 V 和 E 的值，也就可以解出 F 的值。最终式子和找规律结果相同。

C - Cake 3

题目大意

- 定义平面上的一个点对是好的，当且仅当他们互相是最近点之一
- 构造一个 n 个不同点构成的点集，使得每个点恰好在 k 个好的点对中出现
- $1 \le k \le n \le 1000$

题解

- 首先由于每个点对中有两个点，可以得知 $n \cdot k$ 必须是偶数
- 其次，如果有多种最近点距离，那么保留小的那部分可以在 k 不变的情况下将 n 减小。
- 接下来考虑最终点集的（严格）凸包，如果 $k \geq 4$，那么边界上的点需要在 $< 180^\circ$ 范围内有 4 个邻居，那么根据抽屉原理，至少有一对邻居在 60° 以内，此时这一对邻居距离一定小于到凸包上点的距离
- 由归纳法可知 $k \geq 4$ 无解
- 还有一些简单情况是：$k = 1$ 可以用若干条平行线段构造，$k = 2$ 可以用一个正 n 边形构造

题解 (cont'd)

- 接下来讨论 $k=3$ 的情况。结论是 $n \geq 16$ 有解
- 构造可以参考下面两张图

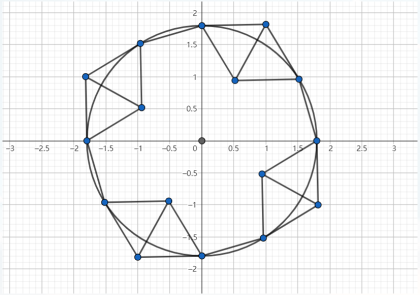

Figure: $n=4t$

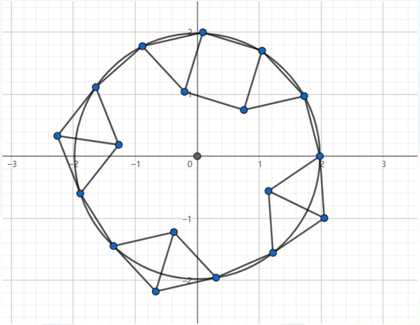

Figure: $n=4t+2$

题解 (cont’d)

- 实现上，相当于已知圆内接多边形每条边边长，求坐标
- 可以通过二分圆的半径和一些简单的三角函数计算求得
- 对于剩下的情况，可以通过讨论凸包上点数、内部点数、度数关系证明无解

D - Puzzle: Wagiri

题目大意

- 给定一张简单连通无向图，边有黑白
- 移除任意多条边使得图仍然连通，且黑边都在环上，白边都不在环上，或输出无解
- $1 \le n \le 10^5$, $n - 1 \le m \le 2 \times 10^5$

题解

- 保留所有黑边，做边双连通分量
- 去掉所有桥边，使用白边将原本不连通的连通块连起来
- 如果最终得到的图连通，则已经获得了一个解，否则无解

Sugar, Oscar, dgg, superguymj, quailty

E - Palindrome Counter

题目大意

- 求所有长 n 字符集 k 的字符串的本质不同回文子串数量之和
- $1 \le n \le 128, 1 \le k \le 10^5$

题解

- 假设我们已知串 t 的 border 集合 b 以及符合该 border 集合的串 t 的个数 cnt。若 border 中含有长度为 i 的串，则 $b[i]=1$，否则 $b[i]=0$。
- 问题为求有多少个 S 包含至少一个 t。
- 令 $f[i]$ 为 t 第一次出现在 $i-|t|+1\dots i$，S 的前缀 i 的方案数。
- $f[i]$ 的计算可以用总方案 k^i减去之前在 $j-|t|+1\dots j$出现了 t 的方案数。
- 最后将所有的 $f[i]\cdot k^{n-i}$ 求和即为答案。

题解 (cont'd)

- 接下来发现，cnt 不为 0 的 border 集合的数量不多，当 $n=128$ 时，数量为 1618346。可以将所有合法的 border 搜出来。
- 具体的搜索方法为，从小到大决定 border 集合包含哪些长度。若当前 $|t|$ 最长的 border（即 $|t|$）为 x，需要加入更长的 border （即新的 $|t|$）为 y。若 $2x \le y$，则 cnt 更新为 $cnt \cdot k^{\lceil \frac{y-2x}{2} \rceil}$，否则 cnt 更新为 $cnt \cdot b[2x-y]$。
- 另外，此时的 cnt 有可能把其他一下不属于当前 border 集合的情况多算了，比如 $b \cup \{z\}$，其中 $x < z < y$ 。但由于我们是从小到大搜索 border，因此这些不合法的情况一定已经搜素出它们的 cnt 值了，将其减去即可。

F - Challenge NPC 2

题目大意

- 给定一棵森林，求其补图的 Hamilton 路径。
- $n \leq 5 \cdot 10^5$

题解

- 注意到一棵菊花是无解的，而剩下的情况都可以构造出答案。假设图是一颗森林 (特判 $n \leq 3$)，则我们将每一棵树的直径连接起来，形成的树必然不是一棵菊花，所以下文只考虑树的情况。
- 仍然考虑抽出树的直径，其上点数一定 ≥ 4 ，考虑从直径的一端开始 bfs 分层，则按照 $246\ldots135\ldots$ 的顺序将所有层的点串起来即可。注意到同层之间的点不会有边，而按照这个顺序将所有点串起来，相邻的层间隔都 ≥ 2，也不会有边。
- 时间复杂度 $O(n)$.

G - Easy Brackets Problem

题目大意

- 给定一个序列，其价值为选择一个合法的括号序列，所有左括号处的数字的和的最大值。现在限制序列的每个数在 $[L_i, R_i]$ 的实数中均匀随机，求其价值的期望。
- $n \leq 100$

题解

- 首先考虑一个序列的价值怎么求，注意到 A_1 是必须选的（必须为左括号），从 A_2 开始，我们两个两个考虑数字，先假设其全为右括号，然后将目前所有的右括号中选择价值最大的一个，变为左括号。注意到这样的括号序列永远是合法的，因为我们可以钦定最后一个位置一定是右括号。
- 考虑到操作上面，就是从 A_2 开始，每次向一个优先队列中压入两个数，再弹出一个最大的数，累计进入答案。

题解

- 现在考虑期望怎么求。一个经典的技巧是，对于一个实数序列，令 $f(x)$ 代表，将所有 $\leq x$ 的数字看成 0 ，将所有 $> x$ 的数字看成 1 ，然后在这个新的序列上重复刚才优先队列的过程的答案。则这个序列最终的答案是 $\int_0^\infty f(x)dx$ 。因为对于任意一个出现在最终答案里的数字 a，其贡献是 $a = \int_0^a 1$。
- 现在只需要考虑如何计算 f。考虑所有 L_i 和 R_i 将实数轴分成若干段，我们独立计算每一段中 $f(x)$ 的形式。在每一段中，$f(x)$ 都是一个多项式。不妨令 $dp_{i,j}$ 表示考虑前 i 个数 (i 为奇数)，此时优先队列中还剩 j 个 1 的概率多项式。转移枚举当前的数字是 0 还是 1 ，并且乘以对应的概率。

题解

- 具体来说，对于一个 $[L_i, R_i]$ 之间随机的数字，假设当前枚举的段是 $x \in [l, r]$，则其为 0 的概率是 $p_0 = \begin{cases} 0 & r \le L_i \\ \frac{x-l}{r-l} & L_i \le x \le S_M \\ 1 & R_i \le l \end{cases}$，其为 1 的概率是 $1 - p_0$，转移时分别考虑即可，特殊判断 $L_i = R_i$。
- 最终答案的计算，可以令初始答案为 n，可以发现所有的 $dp_{i,0}$，之后再加入两个 0，会对答案产生 -1 的贡献，将这些多项式加起来用 n 去减，即为这一段的期望多项式。最后将所有多项式积分求得答案。

H - Genshin Impact's Fault

题目大意

- 给定原神的抽卡规则和抽卡序列，判断其是否合法

题解

- 签到题，用任意方法（例如，前缀和）判断连续 10 个是不是全是 3，连续 90 个是不是没有 5，以及相邻的两个五星是不是全不是 U 即可。

I - Intersecting Intervals

题目大意

- 给定一个数字矩阵，每一行选择一个区间，要求相邻行的区间有交，最大化选中的数字和。

题解

- 令 $f_{i,j}$ 表示考虑前 i 行，第 i 行强制选择第 j 个的答案。转移枚举上一行强制选择的数字，并强制他们有交，则 $f_{i,j}=\begin{cases}\max f_{i-1,k}+sum[k\ldots j]+pre_k+suf_j & k\le j\\ \max f_{i-1,k}+sum[j\ldots k]+pre_j+suf_k & k>j\end{cases}$，其中 pre_i 代表以 i 结尾的最长连续子段和（长度可以为 0），suf_i 表示以 i 开头的最长连续子段和（长度可以为 0）。
- 预处理 pre 和 suf 之后可以使用前缀/后缀 $\max$ 优化转移，时间复杂度 $O(nm)$。

AC.

J - Stone Merging

题目大意

- 有 n 堆石子，每堆 1 个，石子有可以重复的编号
- 有 $k-1$ 个机器编号 2 到 k
- 编号 i 的机器可以合并 i 堆石子，但如果里面有编号 i 的石子，那么机器会坏掉并把其中所有编号 i 的石子提取出来单独分成一堆
- 求全合成一堆的方案
- $1 \le k \le n \le 10^5$

题解

- 如果有两个石子，编号都是 2，那么可以用 2 号机器合成
- 其余情况下，如果 2 到 k 中所有编号都出现在石子上过，那么最后一步没有办法合成
- 考虑最后一步，需要使用一个没在石子编号中出现过的机器，不妨设为 x
- 那么我们可以第一步将 $y=(n-1) \bmod (x-1)+1$ 个石子合成成一堆，后面每次都使用机器 x 来合成
- 注意到 $y \le \frac{n}{2}$，我们要么可以找到 y 个编号 y 的石子，要么可以找到 y 个编号不是 y 的石子，因此第一步一定可以执行成功

K - The Great Wall 2

题目大意

- 给定长为 n 的整数序列，分成恰好 k 个非空连续段使得这 k 段的极差之和**最小**，对 $k = 1, 2, \ldots, n$ 分别求解。
- $n \leq 5\,000$

题解

- 考虑 $dp_{i,j}$ 表示前 j 个数分为 i 段的最小代价，转移枚举最后一段切分的是 $[k,j]$，那么有 $dp_{i,j}=\min_{k=1}^{j}(dp_{i-1,k-1}+w(k,j))$，其中 $w(k,j)=\max_{t=k}^{j}a_t-\min_{t=k}^{j}a_t$。
- 直接转移的复杂度是 $O(n^3)$，不能通过，
- 使用单调栈和线段树优化转移的复杂度是 $O(n^2\log n)$，由于常数较大，也不太容易通过。

题解

- 观察转移代价函数 $w(k,j)$ 的性质可以发现 $w(l,r')+w(l',r)\ge w(l,r)+w(l',r')$ 对任意 $l\le l'\le r'\le r$ 成立，满足“反向”四边形不等式，这意味着转移有“反向”决策单调性。
- 具体来说，对于决策 k 和 k' $(k<k')$，$dp_{i-1,k-1}+w(k,j)\le dp_{i-1,k'-1}+w(k',j)$ 当且仅当 j 属于某个后缀，在这个后缀里可以淘汰掉决策 k'。

题解

- 每个 j 的最优决策 k 构成若干个连续段，尝试维护这些连续段，当 $j \leftarrow j+1$ 时，先用单调栈对 k 分成若干段，每一段内 $w(k,j)$ 的增量相同，并且 k 越大所属的段增量越小，然后从每个分界点开始不断尝试淘汰右侧的决策点，每淘汰一个决策点需要合并两个相邻的决策点的连续段。
- 使用并查集维护决策点的连续段可以做到 $O(n^2\alpha(n))$，位运算优化后可以做到 $O(n^2+n^2\alpha(n)/w)$，使用位运算优化的 set 维护也可以做到 $O(n^2+n^2\log n/w)$，这里 w 表示计算机字长。

THANKS!

AC.NOWCODER.COM