牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

2024 牛客
暑期多校训练营

南京大学命题组

HR.NOWCODER.COM

A - Bridging the Gap 2

题目大意

- n个人在河的一侧，第 i个人有体力值 h_i
- 有且仅有一艘能容纳 L到 R个人的船
- 问是否能将所有人从河的左侧运送到右侧
- $n \le 5 \cdot 10^5$，$h_i \le 5 \cdot 10^5$

题解

- 需要从河的右侧往回运送的趟数最小值：$S=\lceil\frac{n-R}{R-L}\rceil$
- 令 $a_i=\lfloor\frac{h_i-1}{2}\rfloor$为第 i个人能多来回的趟数
- 一个必要条件是 $\sum_{i=1}^{n}\min(a_i,S)\geq SL$
- 下述贪心保证条件的充分性：每次将体力值最高的若干个人从一侧运输到另一侧。
- 贪心成立性的原因在于每次从右侧往回运的过程相当于每次将 $a_1,a_2,...,a_n$中最大的 L个元素减一，更新后的数组 a'_i满足 $\sum_{i=1}^{n}\min(a'_i,S-1)\geq(S-1)L$。由数学归纳法可知正确性。

B - Crash Test

题目大意

- 给定 n类操作，每次可将 x更新为 $|x - a_i|$
- 求从 D开始可得到的最小值
- $n \le 100,\ 1 \le a_i, D \le 10^{18}$

题解

- 不妨假设 $n=2$且 $a_1<a_2$。
- 令 $g=\gcd(a_1,a_2)$，我们将证明我们能生成如下元素：
  $\{0\le x\le a_2 \mid (D-x) \mod g=0 \text{ or } (D+x) \mod g=0\}$。
  1. 通过操作 $x\leftarrow |x-a_1|$，我们可将数 x更新为 $a_1-x \mod a_1$
  2. 通过操作 $x\leftarrow |x-a_2|$，我们可将数 x更新为 $a_2-(a_1-x \mod a_1)=a_2-a_1+x \mod a_1$
  3. 通过操作 $x\leftarrow |x-a_1|$，我们可将数 x更新为 $(x+a_2) \mod a_1$
- 因此，我们能够生成 a_1内（容易推广到 a_2内）所有模 g与 D同余的数。
  同理，我们也能够生成 a_1内所有模 g与 $-D$同余的数。
- 数学归纳法可推广至任意的 n（只需取 $g=\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_n)$即可）。

C - Delete 4 edges

题目大意

- 给定两个连通图 G_1, G_2（保证 $n_1, n_2 \geq 5$），令 G是 G_1, G_2的笛卡尔积。
- 要求有多少种方案，在 G中删除 4 条边，使得 G不连通。

题解

- 注意到删去 4 条边后，G只可能被分割成 2或 3个连通分支，且小的连通分支大小不会超过 4。
- **谨慎地**枚举所有可能的结构，当连通分支数量为 3时，需要容斥。
- 复杂度：$O(m)$。
- 下面证明，每个小连通分支大小不超过 4。

题解

- 令 $c(i,j)$表示 G中的点 (i,j)的对应连通块编号。
- 对于第 i行，若存在 j_1, j_2满足 $c(i,j_1) \neq c(i,j_2)$，说明第 i层 G_2图至少要删一条边以确保 $(i,j_1),(i,j_2)$不连通。
- 由于 $n_1 \geq 5$，至少存在 $1 \leq i \leq n_1$，满足 $c(i,\cdot)$相同。同理存在 $1 \leq j \leq n_2$，满足 $c(\cdot,j)$相同（且与 $c(i,\cdot)$一致。不妨设该连通块为" 主连通块"，下面证明剩余的连通块的大小不超过 4。
- 对于其余连通块 k，令 $S_k = \{(i,j) : c(i,j) = k\}$，$S_k$所属的行数加列数不超过 4（因为该每在一行/列出现，需要在该层割至少 1 条边，分割该点和主连通块），故 $|S_k| \leq (4/2)^2 = 4$。

D - Dominoes!

题目大意

- 有 n张骨牌，每个骨牌上写有 2 个数字 x_i, y_i。
- 要求将 n张骨牌横着摆成一排，一共 $2n$个数字，保证对于相邻的**不属于同一骨牌**的数字互不相同。

题解

- 如果一个数字出现了超过 $n+2$次，一定无解（因为位置 $(2,3),(4,5),...,(2n-2,2n-1)$的数必须互不相同）。否则一定有解。
- 考虑从左到右构造方案，如果所有骨牌都满足 $x_i \neq y_i$，那可以按任意顺序依次加入每一张骨牌到右侧（因为它一定有一个点数和它左侧的点数不同）。
- 所以优先考虑如何摆放 $x_i = y_i$的骨牌。

题解

- 将所有 $x_i = y_i$的骨牌按照每个点数的出现次数放在一个堆中，每次选择出现次数最大（且和上一个放置的不同）的骨牌放在右侧。
- 如果发现剩下的 $x_i = y_i$的骨牌点数都和上一个相同，不妨设该点数为 p，从 $x_i \neq y_i$的骨牌堆中挑一个 $x_i, y_i \neq p$的骨牌作为间隔。
- 可以证明，当所有数字出现次数不超过 $n+1$时，上述方法一定能构造一个合法的方案。

E - Malfunctioning Typewriter

题目大意

- 有一个 01 打字机，每次输入 0或 1，会以 p的概率打出正确的数字，$1-p$的概率打出错误的数字。
- 给定 n个长度均为 m的 01 串，要求用打字机以任意顺序将这 n个串输出（不能有额外的错误输出），求最大成功概率。

题解

- 对 n个串建立 Trie 树。
- 对于 Trie 树上的一个节点 u，记它的左右孩子分别为 ls_u, rs_u，记 $sz(u)$为 u节点子树下的叶子个数（即有多少 01 串以该点为前缀）。
- 答案为 $\prod_u f(sz(ls_u), sz(rs_u))$，其中 $F(x, y)$表示用这个打字机敲出恰好 x个 1 和 y个 0 的最大成功概率。
- F可以预处理，转移：

$$F(x, y) = \max\{pF(x-1, y)+(1-p)F(x, y-1), pF(x, y-1)+(1-p)F(x-1, y)\}.$$

题解

- 对 n个串建立 Trie 树。
- 对于 Trie 树上的一个节点 u，记它的左右孩子分别为 ls_u, rs_u，记 $sz(u)$为 u节点子树下的叶子个数（即有多少 01 串以该点为前缀）。
- Trie 上每个节点对答案的贡献独立，答案为 $\prod_u f(sz(ls_u), sz(rs_u))$，其中 $F(x, y)$表示用这个打字机敲出恰好 x次 1 和 y次 0 的最大成功概率。
- F可以预处理，转移：

$$F(x, y) = \max\{pF(x-1, y)+(1-p)F(x, y-1), pF(x, y-1)+(1-p)F(x-1, y)\}.$$

AC.

题解

- 下面说明为什么可以独立计算 Trie 上每个节点的贡献。
- 如果要”成功打出 n个串”，相当于要求在 Trie 树上走 n趟，每次走完后删掉对应的单词，一旦走出 Trie 树相当于失败。
- 要成功的走完这 n趟，那对于 Trie 上每个非叶子节点 u，不妨设 $sz(ls_u) = x, sz(rs_u) = y$，我们需要经过该点恰好 $x + y$次，每次经过该点，需要决策输入 0或 1，目标是恰好 x次走向左儿子，y次走向右儿子。
- 这里会发现，在 Trie 上每个节点 u的决策是独立的，相当于要在该节点恰好打出 x次 0，y次 1，这一概率可以预先处理记为 $F(x, y)$。

F - MMR Double Down Tokens

题目大意

- 在排位赛中，你知道接下来有 n个胜场和 m个负场，这 $n+m$场按均匀随机顺序排列。每场游戏，赢了会 $+1$ 分，输了会-1 分。
- 你一共有 k张双倍币，每场比赛开始前，你可以使用 1 张双倍币，使得该局的得分（失分）翻倍。
- 你需要最大化使用这些”双倍币”带来的**额外得分**的期望。

AC.

题解

- 最优策略一定是在最后 k场比赛" 决定 "是否使用" 双倍币" ，即如果当前剩余的胜场 $p>$ 负场 q，则使用" 双倍币"，获得 $\frac{p-q}{p+q}$的额外期望得分。
- 记事件 $B_{p,q}$表示最后 $p+q$轮剩余 p胜 q负，答案为:

$$\sum_{p>q,p+q\leq k} \Pr\left[B_{p,q}\right] \cdot \frac{p-q}{p+q}$$

- 其中 $\Pr\left[B_{p,q}\right] = \frac{\binom{n}{p}\binom{m}{q}}{\binom{n+m}{p+q}} = \frac{\binom{p+q}{p}A(n,p)A(m,q)}{A(n+m,p+q)}$，$A(x,y) = x(x-1)\ldots(x-y+1)$。

题解

$$
ans = \sum_{p>q,p+q\le k} \frac{\binom{p+q}{p} A(n,p)A(m,q)}{A(n+m,p+q)} \left(\frac{p}{p+q} - \frac{q}{p+q}\right)
$$

$$
= \sum_{p>q,p+q\le k} \frac{\left(\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}\right) A(n,p)A(m,q)}{A(n+m,p+q)}
$$

- 记 $c(p,q) = \left(\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}\right) A(n,p)A(m,q)$。
- 枚举 $r = p+q$，我们需要快速计算 $\sum_{p>\lfloor r/2 \rfloor} c(p, r-p)$。

题解

- 注意到 $c(p,q)=(n-p+1)c(p-1,q)+(m-q+1)c(p,q-1)$。
- 令 $S(r,s)=\sum_{p\geq s}c(p,r-p)$，有

$$S(r,s)=(n+m-r+1)S(r-1,s)+(n-s+1)c(s-1,r-s).$$

- 可以 $O(k)$复杂度，对每个 $1\leq r\leq k$，计算 $S(r,\lfloor r/2\rfloor+1)$的值。
- 复杂度：$O(n+m)$。

题解

下面证明为什么在最后 k轮使用”双倍币”是最优的：

- 用归纳法，不妨设如果有 $k-1$枚”双倍币“，一定在最后 $k-1$轮使用；下面证明若有 k枚双倍币，一定在最后 k轮使用。
- 不妨假设你在倒数第 l轮使用了倒数第 k枚”双倍币” $(l>k)$，根据归纳假设，剩下 $k-1$枚”双倍币“需要在最后 $k-1$轮使用。
- 由于在倒数 l轮前，最后 l局比赛的结果是均匀随机的，所以在倒数第 l轮使用”双倍币”，等价于等到倒数第 k轮，再使用”双倍币“(无论此时是否剩余胜场)
- 实际上在等到倒数第 k轮时，若剩余胜场小于负场，可以选择不使用”双倍币”，等到倒数第 k轮再决定是否使用双倍币的得分期望优于在倒数第 l轮使用。

G - Pythagorathean Transformation

题目大意

- 一个正整数 s可以变换成为 t当且仅当 s, t同属于某一组“勾股数” (a, b, c)，即 $a^2 + b^2 = c^2$。
- 给定正整数 S, T，要求 2000 步内将 S变换成 T。

题解

- 首先，$1, 2$不属于任何一组勾股数，所以 $S \le 2$或 $T \le 2$时无解。其余的情况可以证明都有解。
- 由于变换操作是可逆的，所以我们只需要构造一个方案，使得任何正整数 $n \le 10^9$都可以变成 4 即可。
- 实际上，由于存在变换 $8k \to 15k \to 12k \to 5k \to 4k$，我们只需要将任意数转化为 2 的幂次即可。

题解

- 考虑勾股数的通用构造：$(2ab, a^2-b^2, a^2+b^2)$，把 a^2-b^2写成 $(a+b)(a-b)$。
- 当前数为 $2^c pq(p>q)$，其中 p,q是奇数，有变换 $2^c pq \to 2^{c+1}\left(\frac{p+q}{2}\right)\left(\frac{p-q}{2}\right)$。
- 对于任意输入数 $n \le 10^9$，一定可以写成 $2^c pq$的形式，其中 $q=1$。
- 我们可以不断利用变换：$2^c pq \to 2^{c+1}\left(\frac{p+q}{2}\right)\left(\frac{p-q}{2}\right) = 2^{c'}p'q'$（其中 p,q,p',q'为奇数），直到 $p=q=1$。
- 上述操作会执行 $O(\log n)$次，因为两轮变换后，p的值至少减半。
- 注意上述过程中的数可能超过 10^{18}，所以在过程中可以利用 $8k \to 4k$的变换，将 2^c的值控制在 4或 8。

H - Rectangle Intersection

题目大意

- 给 k 个在 $n \times m$ 方格表上的矩形，求所有至少一个矩形的组合的非空交的最小面积大小。
- $1 \leq k \leq 1000000, 1 \leq n, m \leq 2000.$

AC.

题解

- 首先，矩形交仍然是矩形。为了方便说明，我们额外引入一个覆盖整个方格表的大矩形，这不会影响结果。
- 利用前缀和和简单的动态规划，对某个格子 (x, y)，寻找如下四个值:
- 最大的 u 使得 (u, y) 是某个矩形最上边一行的格子，
- 最小的 d 使得 (d, y) 是某个矩形最下边一行的格子，
- 最大的 l 使得 (x, l) 是某个矩形最左边一列的格子，
- 最小的 r 使得 (x, r) 是某个矩形最右边一列的格子。
- 如果 u 与 x 相等且 l 与 y 相等用 $(r - l + 1)(d - u + 1)$ 和当前存储的最小答案取较小值更新答案。

题解

- 当 (x, y) 是最小矩形交左上角的格子时，求出的 u, d, l, r 分别是这个最小矩形交的上下左右边界，所以算法结束得到的值不大于最小矩形交的面积。

题解

- 接下来证明，如果 l 与 x 相等且 u 与 y 相等，一定存在一个面积不小于 $(r-l+1)(d-u+1)$ 的矩形交从而算法结束得到的值不小于最小矩形交的面积。
- 不妨称 (u,y)是上矩形最上边一行的格子，(d,y)是下矩形最下边一行的格子，(x,l)是左矩形最左边一列的格子，(x,r)是右矩形最右边一列的格子。由定义可知，上矩形和左矩形都包含格子 (d,y), (x,r), (d,r), 下矩形包含格子 (d,y), 右矩形包含格子 (x,r). 接下来分情况讨论：

题解

- 如果下矩形和右矩形都包含格子 (d,r)，那么四个矩形的交面积不超过 $(r-l+1)(d-u+1)$ 且都包含格子 (d,r);
- 如果下矩形不包含格子 (d,r)，那么下矩形和上矩形和左矩形的交面积不超过 $(r-l+1)(d-u+1)$ 且都包含格子 (d,y);
- 如果右矩形不包含格子 (d,r)，那么右矩形和上矩形和左矩形的交面积不超过 $(r-l+1)(d-u+1)$ 且都包含格子 (u,r).
- 综上所述，该算法可以正确得到最小矩形交的面积。
- 时间复杂度 $\mathrm{O}(n\cdot m+k)$.

I - Removing Elements

题目大意

- 给一个整数集合 $T \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$以及初始集合 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$，可以删除 S中第 $k \in T$大的元素，求能得到的集合个数。
- $n \leq 2 \cdot 10^5$。

题解

- 我们将题目重新叙述成如下：
  - 考虑一个 $1 \times n$的纸带，初始时所有格子均为白色。我们可以选择 $k \in T$，将第 k个白色格子染为黑色。求能得到的纸带方案数
- 假设被染为黑色的格子的指标为 $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_k \le n$，则该纸带能被染色得到当且仅当对于所有的 $1 \le i \le k$，都有 $i > a_i - f(a_i)$，其中 $f(x) = \max\{j \le x \mid j \in T\}$（若集合为空集则为 $-\infty$）。
- 必要性是显然的，充分性由下述贪心算法保证：每次将最远的能染黑色的格子染为黑色。

题解

- 利用该充要条件，我们可以得到一个 $O(n^2)$的动态规划做法：
  - 令 $dp_{i,j}$为纸带前 i个格子中有 j个格子被染黑色的方案数，则该方案数可以无条件转移至 $dp_{i+1,j}$；若 $j+1>i-f(i)$，则可转移至 $dp_{i+1,j+1}$。

题解

- 令 $g(i)$为转移方程的转移边界条件，即 $j \geq g(i)$可转移，否则不可转移。
- g满足 $g(i+1) = g(i) + 1$或 $g(i+1) = 0$。若 dp 值 $dp_{i,\cdot}$已知，且 $g(i+B) = g(i) + B$，我们考虑下述方式将 dp 值从 i转移至 $i+B$:
  1. 对于所有的 $j < g(i)$，$dp_{i,j}$仅能转移至 $dp_{i+B,j}$;
  2. 对于所有的 $g(i) \leq j \leq g(i) + B$, 转移可在 $O(B^2)$的时间内得到;
  3. 对于所有的 $j > g(i) + B$，$dp_{i,j}$转移至 $dp_{i+B,j'}$可在 $O(n \log n)$的时间内通过 FFT 转移（转移系数为 $\binom{B}{j'-j}$）。

  同样的，若对于所有的 $i \leq j \leq j+B$都有 $g(j) \leq 2B$，我们也可以类似的在 $O(B^2 + n \log n)$的时间内完成 B步的转移。
- 综合上述，取 $B = \sqrt{n \log n}$，可在 $O(n\sqrt{n \log n})$的时间内解决问题。

J - Rigged Games: Game Design

题目大意

- 两队打比赛，大分 Bo$2b-1$，小分 Bo$2a-1$。
- 给定的长度为 n的串，两队比赛的每个小分结果是这个串的循环重复。
- 问从该串的每个位置开始，最终谁会赢得整个比赛。

题解

- 首先对每个位置，求出从它开始进行 $\mathrm{Bo}2a-1$后的胜负，以及比赛结束时在循环串的位置。
- 上述可以用倍增，$f(i,j)$表示从位置 i开始进行 2^j局小分后的状态（两队分别赢了几分，以及结束时在循环串的位置）。
- 处理完每一局从每个位置开始的结果后，再用倍增求每一大局的结果，即用 $g(i,j)$表示从位置 i开始进行了 2^j小局后的状态（两队分别赢了几分，以及结束时在循环串的位置）。

K - Slay the Spire: Game Design

题目大意

- 给定一个 n个点 m条边的有向无环图 $G=(V,E)$以及一个整数 k，其中所有无入度的点为源点，所有无出度的点为汇点。
- 要求选择最少数量的非源点和汇点的顶点放置精英怪，使得从任何一个源点出发到任何一个汇点都要经过至少 k个精英怪；或者输出不存在合法的放置方式。
- $2 \le n \le 1000, 1 \le m \le 5000, 1 \le k \le 5$。

题解

- 先考虑简化：如果题目要求我们在图的边上放置精英怪应该怎么做。
- 将每个顶点 u拆成 k个顶点 $(u, 0), \dots, (u, k-1)$，其中 (u, i)表示从任意源点出发到 u是否能够经过不超过 i个精英怪。
- 我们建立超级源点 S和超级汇点 T，我们考虑最小割建图。
  - S连向所有汇点 s的 $(s, 0)$，所有汇点 t的 $(t, k-1)$连向 T，容量都为 ∞;
  - 每个 (u, i) $(0 \le i < k-1)$连向 $(u, i+1)$，容量为 ∞;
  - 对于每条边 $(u, v) \in E$，令每个 (u, i)连向 (v, i)，容量为 1;

题解

- 上图从 S到 T的最小割即为答案。证明的话考虑如下：
  - 从该图的最小割显然可以构造出答案的一个上界 (选择所有被割掉的边);
  - 给定一种选择边的方案也能构造一种相同答案的最小割 (对于每条被选择的边 (u, v)，割掉 $(u, dis(u))$到 $(v, dis(u))$的边即可，其中 $dis(u)$表示在原图中任意源点到 u所经过的精英怪的最少个数。
- 那么在点上放置精英怪的问题也可以将每个点拆成 $2k$个顶点后类似处理即可。
- 要跑一个 $O(kn)$个点 $O(km)$条边的最大流，由于流量不超过 n，总时间复杂度为 $O(knm)$。
- Bonus：在 $1 \leq k \leq 1000$的限制下解决此题。

L - Sudoku and Minesweeper

题目大意

- 给一个 9×9的填好的数独，要求保留其中一部分数字（至少保留 1 个），剩下的替换成”地雷”。
- 要求满足对于每个数字，与它 8 连通的格子中是地雷的数量恰好等于自身。

题解

- 如果在非边界存在一个数字 8，只要保留该数字，其余的数字均替换成"地雷"即可。
- 由于保证了输入是一个数独，所以中间的 3×3区域内一定存在恰好一个数字 8，选择它保留即可。

THANKS!

AC.NOWCODER.COM